

Cadran solaire à chapeau

David Alberto



- I. Présentation**
- II. Théorie du cadran à chapeau**
- III. Tracé des lignes**
- IV. Instructions de montage**

I. Présentation

Le cadran solaire à chapeau consiste en un cylindre vertical muni de lignes horaires et coiffé d'un disque horizontal de plus grand diamètre.

Pour repérer l'heure, il faut prendre un point particulier de l'ombre du disque. Le point de hauteur maximale étant assez difficile à repérer, on choisit plutôt l'intersection entre l'ombre portée du disque et la ligne verticale de séparation lumière-ombre (ombre propre du cylindre). La position de ce point sur les lignes horaires donne l'heure solaire (sur la photo ci-dessous, par exemple, un peu avant 17h00).



FIG. 1 – Sur cette photo, l'intersection des ombres indique presque 17h00.

La ligne verticale de l'ombre portée dépend de l'azimut du Soleil; la position vertical du point indiquant l'heure dépend de la hauteur du Soleil; ce cadran est donc à la fois un cadran d'azimut et un cadran de hauteur. De ce fait, il cumule des caractéristiques de ces deux types de cadrans, et notamment deux inconvénients : il doit être *orienté* relativement aux points cardinaux, et il est *peu précis autour de midi solaire*.

En revanche, le calcul de son tracé est assez simple, ainsi que la lecture de l'heure.

Le calcul du tracé de ce cadran dépend de 3 paramètres :

- la latitude du lieu d'utilisation
- le rayon du cylindre
- le rayon du disque

Pour diffuser largement le tracé et réduire le nombre de paramètres, je propose de prendre comme cylindre une canette de soda de forme haute ("slim"), de diamètre 5,8 cm et de hauteur 14,5 cm.

Une fois imposées ces dimensions, le choix du diamètre du disque est assez contraint : plus le disque est large, plus les lignes horaires s'allongent vers le bas, au risque de déborder. Plus le disque est étroit, plus la lecture est difficile (lignes resserrées et cachées par le disque). Il se trouve que pour les latitudes supérieures ou égales à 45° , le diamètre d'un CD convient tout à fait.

II. Théorie du cadran à chapeau

La Fig. 2 présente la situation. On imagine un rayon de Soleil arrivant tangent au cylindre en P, point indiquant l'heure. Ce point peut être vu comme l'ombre portée d'un point M de la périphérie du disque.

Par définition, l'azimut A du Soleil est l'angle entre la direction du sud et le Soleil, A étant dans le plan horizontal. La position de P autour du cylindre dépend de A et du rayon r dudit cylindre.

Si on décide de placer à l'ouest l'origine des positions x_P de P le long du tracé, alors

$$x_P = rA \frac{\pi}{180^\circ}$$

Avec cette convention, quand le Soleil est au sud (azimut nul), le point P se trouve à l'ouest, ce qui implique d'orienter la ligne de midi vers l'ouest.

L'azimut A du Soleil est donné par

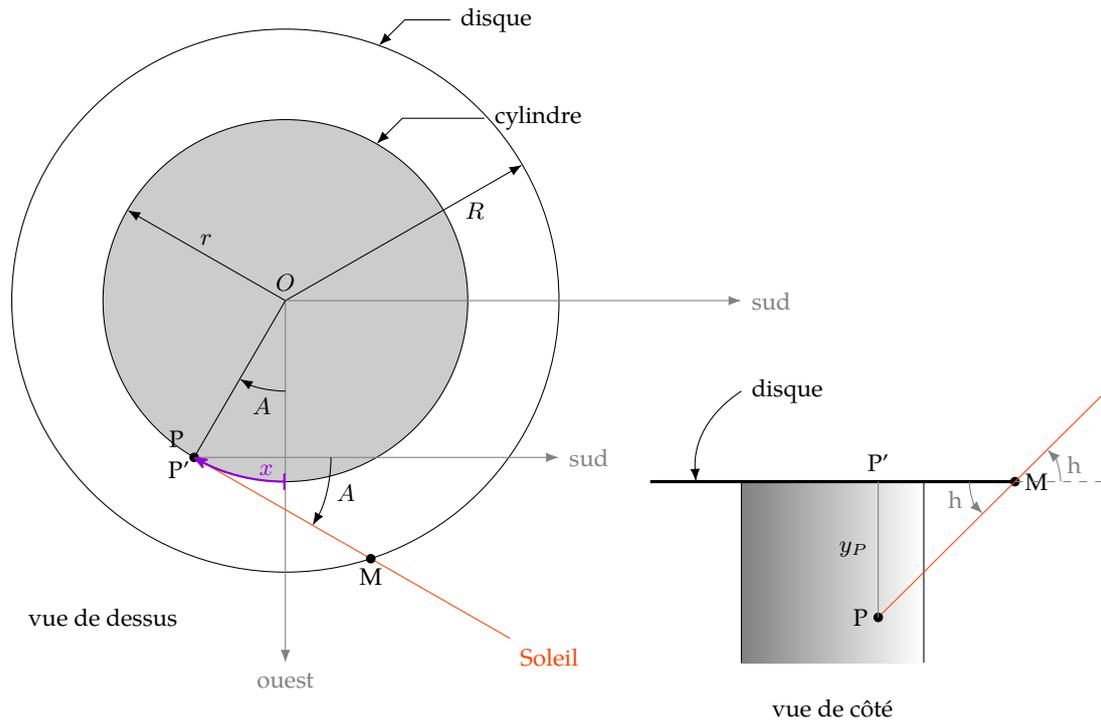


FIG. 2 – Le cadran à chapeau vu de dessus et de côté, avec la définition de quelques points. P est le point indiquant l'heure ; M le point du bord du disque dont l'ombre est en P.

$$A = \text{atan2}(\sin(H), \sin \varphi \cos H - \cos \varphi \tan \delta)$$

où H est l'angle horaire du Soleil
 φ la latitude du lieu
 δ la déclinaison du Soleil

La position verticale y_P du point P dépend de la hauteur h du Soleil, mais aussi de la longueur du style fictif horizontal $P'M$. Dans le triangle OPM, on a

$$P'M = \sqrt{OM^2 - OP'^2} = \sqrt{R^2 - r^2}$$

Grâce à la symétrie circulaire du cadran, la longueur $P'M$ est indépendante de la hauteur et de l'azimut du Soleil. Elle ne dépend que de paramètres géométriques. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} y_P &= -P'M \tan h \\ &= -\sqrt{R^2 - r^2} \tan h \end{aligned}$$

h est donnée par

$$\sin h = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos H$$

Les relations précédentes permettent de calculer les coordonnées (x_P, y_P) du point d'ombre ; pour tracer une ligne horaire d'angle H donné, il faut faire varier la déclinaison δ de $-23,44^\circ$ à $+23,44^\circ$.

L'angle horaire H doit varier par pas de 15° (pour les heures entières); les valeurs extrêmes de H correspondent à l'arc semi-diurne H_0 donné par

$$\cos H_0 = -\tan \varphi \tan \delta$$

III. Tracé des lignes

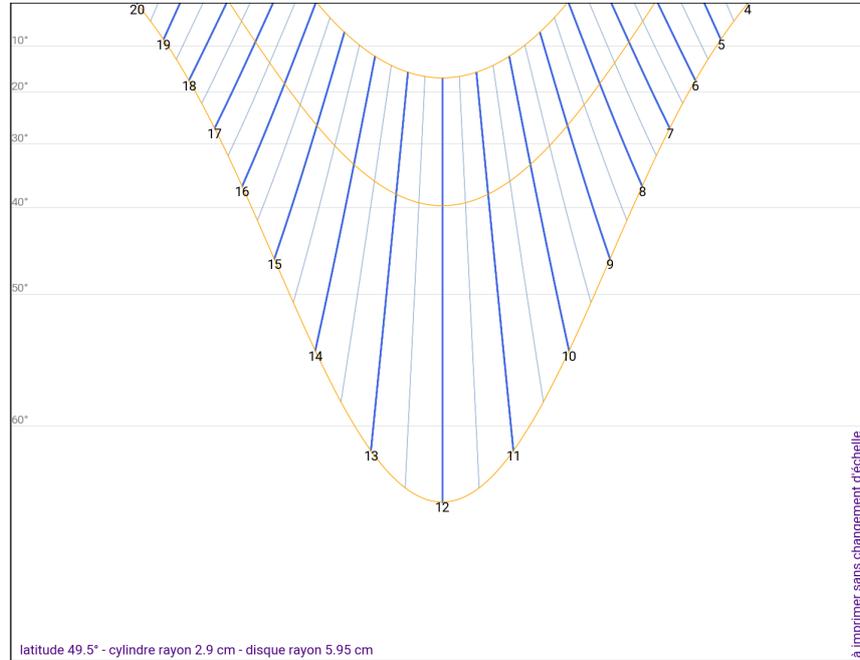


FIG. 3 – Tracé de l'enveloppe du cylindre pour la latitude $49,5^\circ$.

Les courbes orange sont les arcs diurnes pour les dates de changement de saison : solstice d'été (courbe la plus basse), équinoxes de mars et de septembre (courbe intermédiaire), et solstice d'hiver (courbe la plus haute). Pour tracer l'une de ces courbes, il faut fixer la déclinaison du Soleil à sa valeur de la date correspondante, et faire varier continûment l'angle horaire entre ses valeurs limites.

À l'endroit où ces courbes atteignent le bord supérieur du tracé, on retrouve les heures solaires de lever et de coucher du Soleil. Par exemple, aux équinoxes le Soleil se lève à 6h et se couche à 18h. Au solstice d'hiver, il se lève vers 8h et se couche vers 16h.

Les lignes horaires "4h" et "20h" n'apparaissent que pour les latitudes supérieures à $49,1^\circ$.

Adaptation du rayon du disque

Pour un cylindre de hauteur imposée, on peut rechercher le rayon optimal du disque qui permet d'étirer les lignes horaires vers le bas, sans dépasser les limites. On s'impose alors une longueur pour la ligne horaire "12", et on cherche le rayon du disque qui permet de respecter cette condition. En effet, il est facile de découper un disque de rayon quelconque dans du carton rigide.

La longueur maximale de la ligne "12" est atteinte lors du solstice de juin. À cette date, la hauteur méridienne du Soleil est donnée par

$$h_m = 90^\circ - \varphi + \varepsilon \quad (\varepsilon = 23,44^\circ)$$

on en déduit alors la longueur maximale de la ligne midi

$$L_{max} = \sqrt{R^2 - r^2} \times \tan h_m$$

À partir de cette expression, on peut déduire la valeur qu'il faut donner à R pour une longueur L_{max} donnée (par exemple, pour une canette de hauteur 14 cm, choisir $L_{max} = 13,5$ cm)

$$R = \sqrt{r^2 + \left(\frac{L_{max}}{\tan h_m}\right)^2}$$

latitude	R (cm)
42	5,4
43	5,6
44	5,8
45	6,1
46	6,3

TAB. 1 – Quelques valeurs de R , pour un cylindre de rayon 2,9 cm (canette) et $L_{max} = 13,5$ cm. Pour les latitudes inférieures à 45° , un CD de rayon 5,9 cm est trop grand pour contenir la ligne "12" complète.

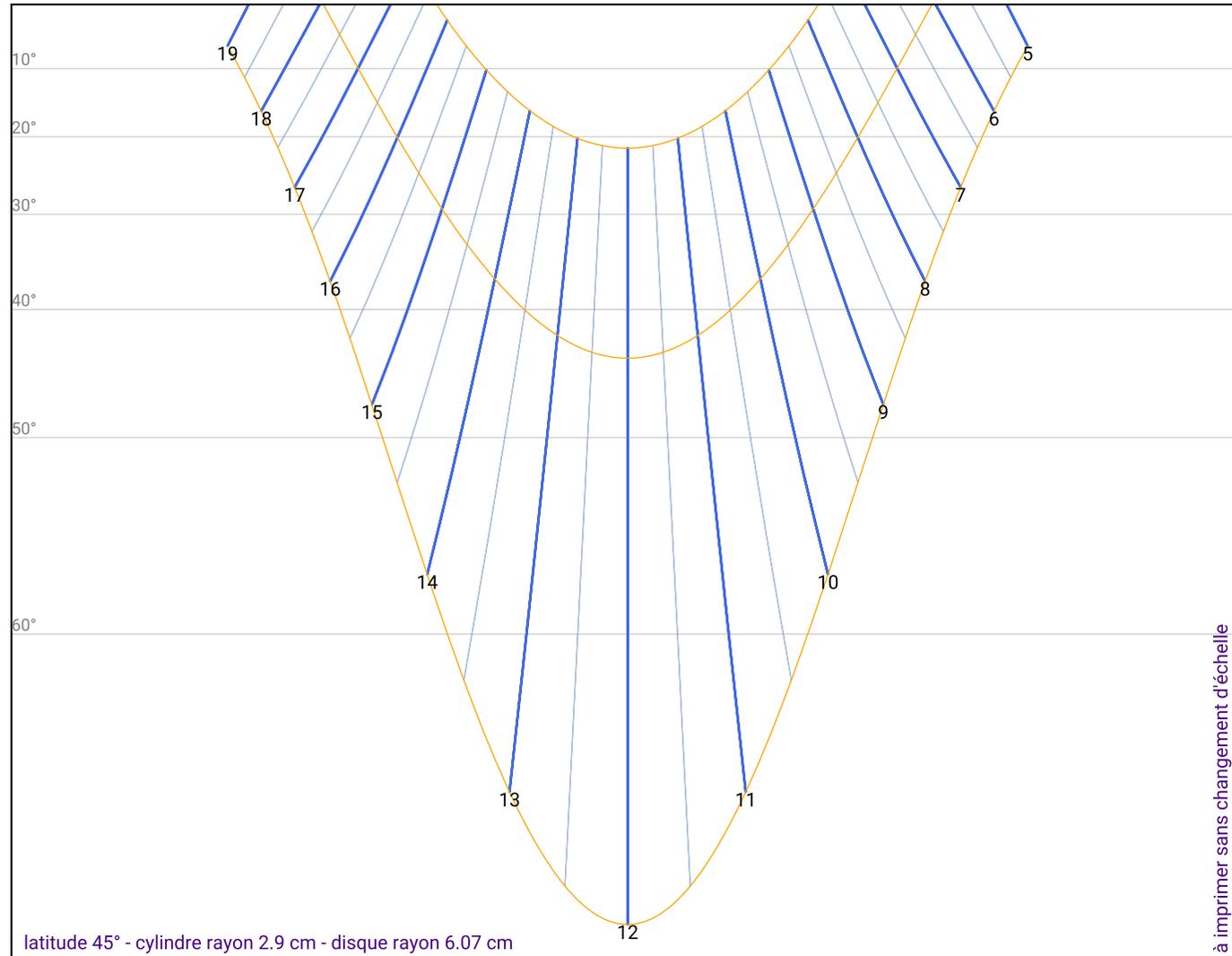
IV. Instructions de montage

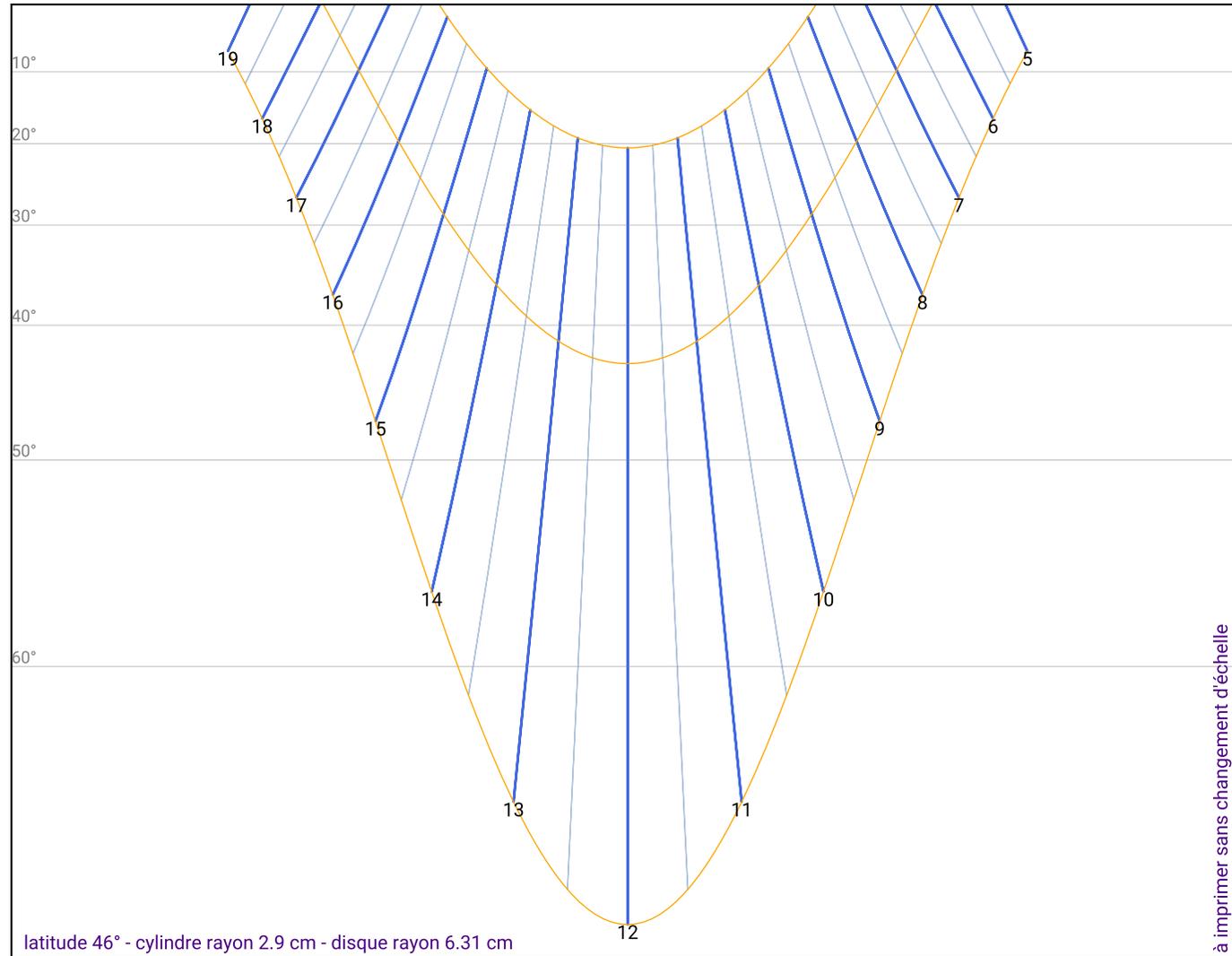
Dans les documents fournis ci-après, j'ai pris le diamètre d'un CD pour le calcul des lignes horaires, pour les latitudes entières entre 45° et 52° , soit approximativement entre Lyon et la Belgique. Pour des latitudes plus basses, il suffit de remplacer le CD par un disque de carton aux dimensions indiquées au bas du tracé. Pour monter le cadran solaire :

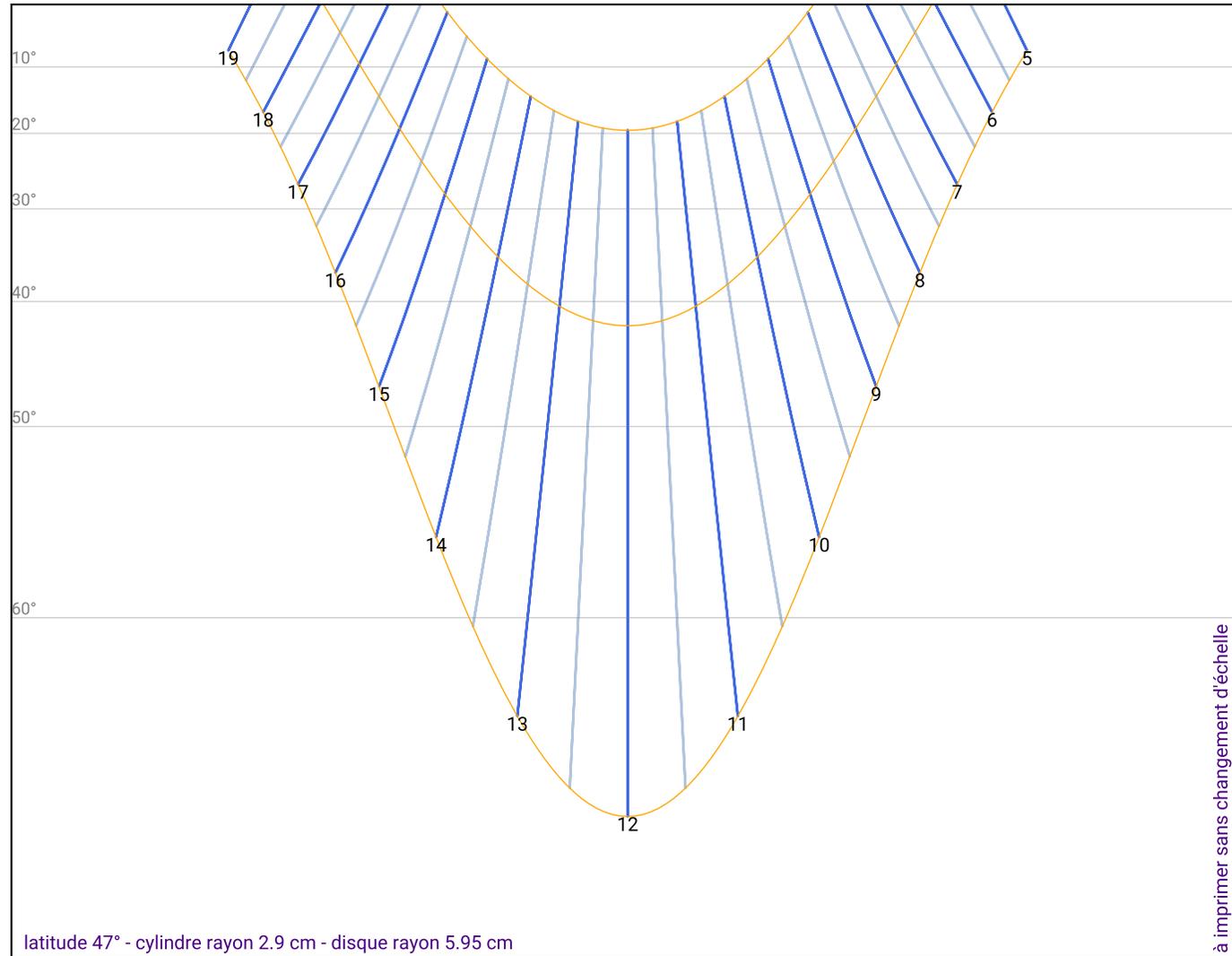
- imprimer le document correspondant à votre latitude, sans changement d'échelle, donc sans adaptation aux marges de l'imprimante. Les tracés sont au format A4 paysage, avec une marge gauche de 2 cm.
- découper le rectangle.
- le coller autour de la canette de soda. Vérifier soigneusement la jonction des bords de la feuille.
- coller sur la canette un disque aux dimensions indiquées sur la feuille (5,95 cm pour un CD). Attention de bien centrer le CD sur la canette.
- la feuille doit être complètement remontée contre le disque.

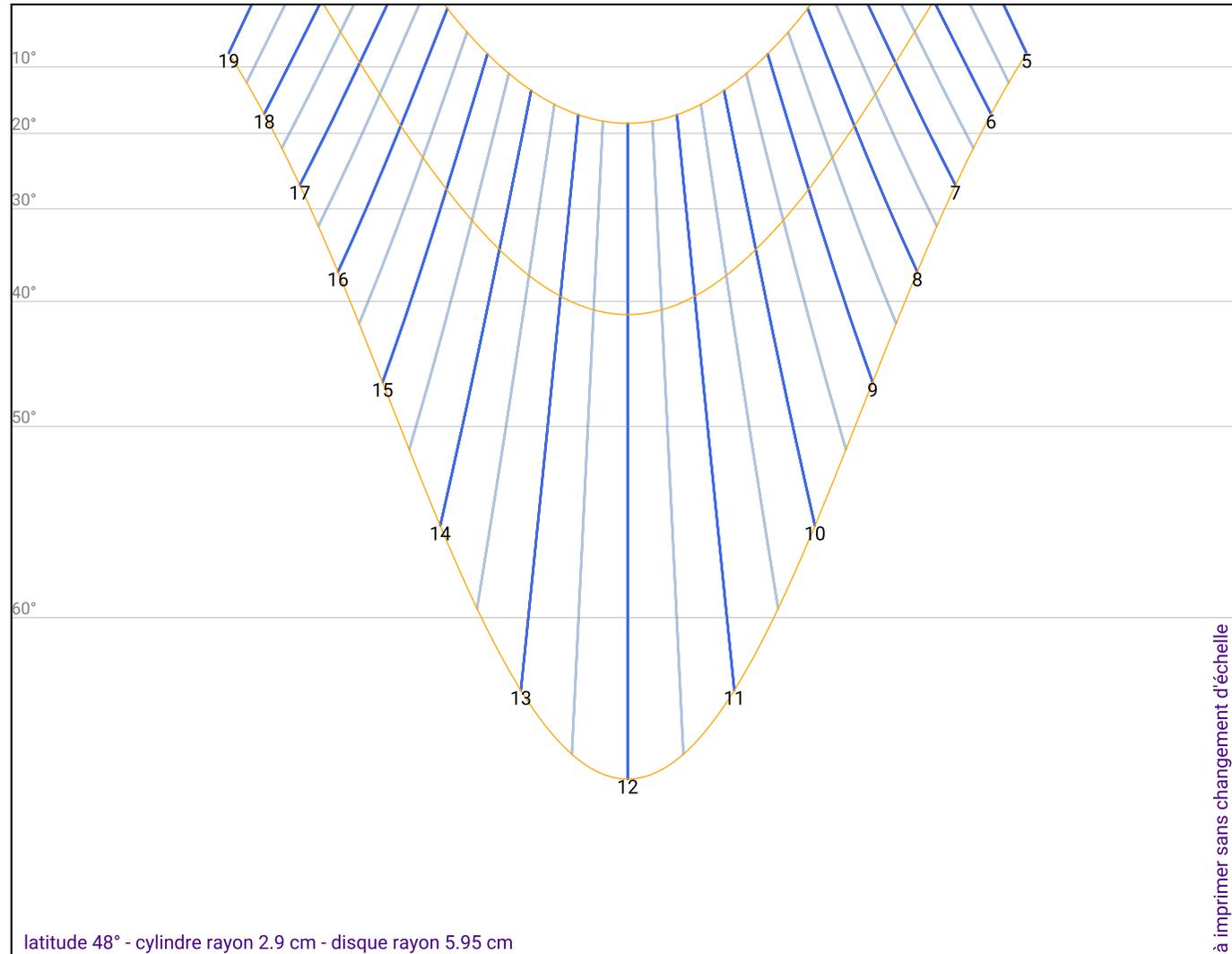
Utilisation :

- poser le cadran solaire au Soleil, sur une surface horizontale (si possible en hauteur, pour voir les lignes les plus hautes, en début et fin de journée).
- orienter la ligne horaire "12" vers l'Ouest, au moyen d'une boussole, par exemple.
- repérer l'intersection des deux ombres pour lire l'heure solaire. Les ombres peuvent indiquer deux points d'intersection, diamétralement opposés ; selon que l'on soit le matin ou l'après-midi, il faut choisir l'heure en conséquence.









latitude 48° - cylindre rayon 2.9 cm - disque rayon 5.95 cm

à imprimer sans changement d'échelle

